القسم: تحليل رياضيات السنة: الرابعة (ت+) المادة: معادلات تكاملية المحاضرة: الثانية

نظرية:

اذا كان التابع $w(x)$ مستمراً في المجال $[a,b]$ وغير سالب واذا تحققت العلاقة

$\int_a^b w(x)\,dx = 0$ فعندئذ يكون التابع $w(x)=0$ في المجال $[a,b]$

الاثبات:

نفرض جدلاً أن دعوانا غير صحيحة اي انه في اي نقطة معينة $x=c$ من المجال $[a,b]$ يمكن أن يكون $w(c)>0$ عندئذ يكون التابع $w(x)$ موجباً في المجال $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ علماً أن $\varepsilon>0$ مقدار صغير بمقدار كافي.

فاذا فرضنا $m>0$ القيمة الصغرى لهذا التابع في هذا المجال.

وبملاحظة أن التابع $w(x)$ غير سالب فعندئذ يكون لدينا

$$\int_a^b w(x)\,dx \geqslant \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} w(x)\,dx \geqslant \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} m\,dx = m.x\Big|_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon}$$

$$= m[\varepsilon + c - c + \varepsilon] = 2m\varepsilon > 0$$

وهذا يناقض الفرض إذاً الفرض الجدلي خاطئ اذاً $w(x)=0$ في جميع نقاط المجال $[a,b]$

- بعض الخواص المتعامدة المنظمة:

نفرض أن المجموعة $g_1(x), g_2(x), \dots, g(x)$ مجموعة تامة وليكن $f(x)$ تابعاً مستمراً مفروضاً ولنفرض أن جميع امثال فورييه لهذا التابع معدومة اثبت أن $f(x)=0$ في المجال $[a,b]$

البرهان:

بما أن المجموعة المعطاة تامة فإن علاقة الإكمال محققة أي

$$\int_a^b (f(x))^2\,dx = \sum_{k=1}^{n} C_k^2$$

وبما أن امثال فورييه معدومة إذاً

$$\int_a^b (f(x))^2\,dx = 0$$

وبالتالي من نظرية سابقة فإن $(f(x))^2 = 0 \Leftarrow f(x)=0$

- لننتقل الى الحالة العامة :
نفرض أن $\sum_{k}^{n} c_k\, g_k(x)$ (*) هي سلسلة فورييه للتابع $f(x)$
" إلا أنه ليس من الضروري أن تكون هذه السلسلة متقاربة وإذا كانت متقاربة فقد لا يكون مجموعها مساوي $f(x)$ في الحالة العامة "
وإذا فرضنا أن هذه السلسلة متقاربة بانتظام في المجال $[a,b]$ فعندئذ يكون

$$f_1(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k\, g_k(x)$$

تابعاً مستمراً لأنه افترضنا الاستمرار في التابع $f(x)$ إذا ضربنا طرفي هذه المعادلة بتابع كيفي $g_p(x)$ من التوابع المتعامدة والمنظمة ثم كاملنا على المجال $[a,b]$ " إن السلسلة متقاربة بانتظام ولذلك يمكن مكاملتها حداً حداً " عندئذ نحصل استناداً الى تعريف التوابع المتعامدة المنظمة على العلاقة :

$$\int_a^b f_1(x)\cdot g_p(x)\,dx = \int_a^b f(x)\cdot g_p(x)\,dx - \int_a^b g_p(x)\sum_{k=1}^{n} c_k\, g_k(x)\,dx$$

$$= \int_a^b f(x)\cdot g_p(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} c_k \int_a^b g_p(x)\, g_k(x)\,dx$$

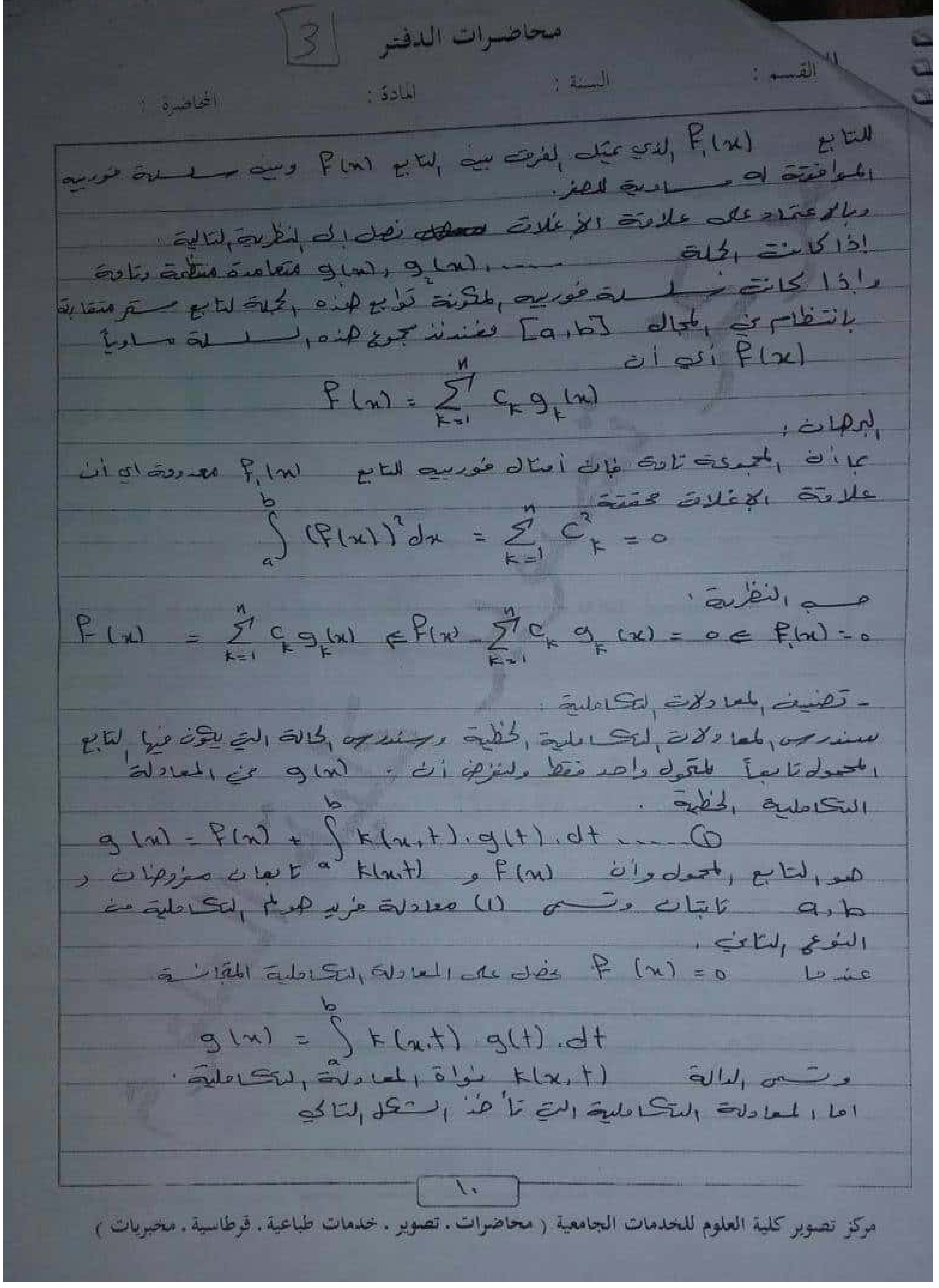
وبما أن المجموعة متعامدة ومنظمة إذاً :

$$\int_a^b f_1(x)\, g_p(x)\,dx = \int_a^b f(x)\, g_p(x)\,dx - c_p$$

ومن جهة أخرى c_p ما هو إلا أمثال فورييه للتابع $f(x)$ إذاً

$$\int_a^b f_1(x)\cdot g_p(x)\cdot dx = 0 \Rightarrow c_p = 0$$ أمثال فورييه للتابع f_1.

وهكذا نرى أنه إذا كانت سلسلة فورييه المعطاة (*) للتابع $f(x)$ متقاربة بانتظام فعندئذ تكون أمثال فورييه



التابع $f_1(x)$ الذي يمثل الفرق بين التابع $f(x)$ وبين سلسلة فورييه الموافقة له مساوية للصفر.

وبالاعتماد على علاقة الإغلاق نصل إلى النظرية التالية:

إذا كانت الجملة $g_1(x), g_2(x), \dots$ جملة متعامدة منظمة تامة وإذا كانت سلسلة فورييه المكونة من توابع هذه الجملة لتابع مستمر متقاربة بانتظام في المجال $[a,b]$ فعندئذ مجموع هذه السلسلة مساوياً $f(x)$ أي أن

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n} c_k g_k(x)$$

البرهان:

بما أن الجملة تامة فإن أمثال فورييه التابع $f_1(x)$ معدومة أي أن علاقة الإغلاق محققة

$$\int_a^b (f_1(x))^2\,dx = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 = 0$$

ومن النظرية:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k g_k(x) \Leftarrow f(x)-\sum_{k=1}^{n} c_k g_k(x)=0 \Leftarrow f_1(x)=0$$

- تصنيف المعادلات التكاملية:

سندرس المعادلات التكاملية الخطية وسندرس الحالة التي يكون فيها التابع المجهول تابعاً لمتحول واحد فقط ولنفرض أن $g(x)$ هي المعادلة التكاملية الخطية.

$$g(x)=f(x)+\int_a^b k(x,t)\cdot g(t)\,dt \quad \dots (1)$$

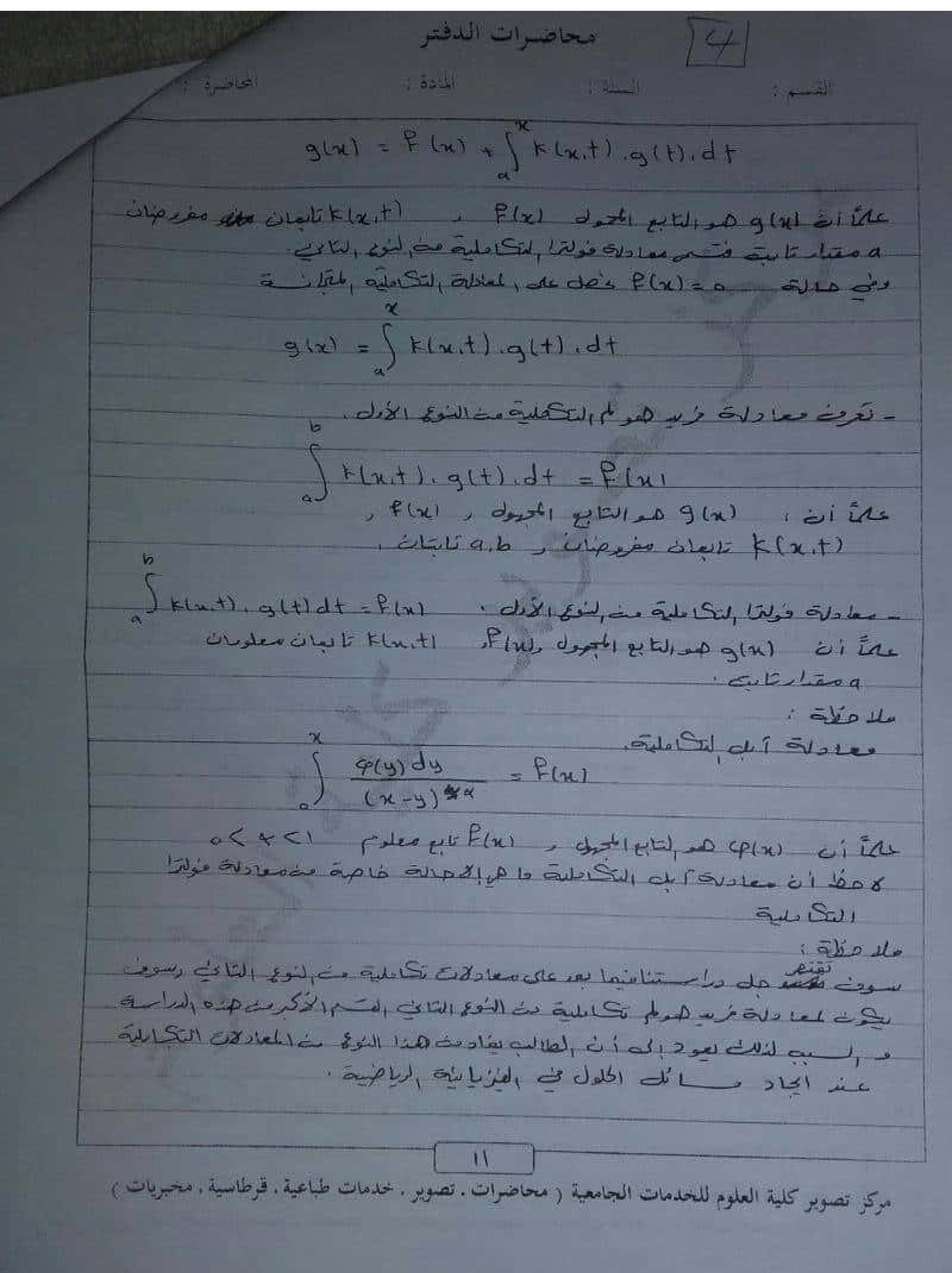
هو التابع المجهول وأن $f(x)$ و $k(x,t)$ تابعان معروفان و a, b ثابتان وتسمى (1) معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الثاني.

عندما $f(x)=0$ نحصل على المعادلة التكاملية المتجانسة

$$g(x)=\int_a^b k(x,t)\,g(t)\,dt$$

وتسمى الدالة $k(x,t)$ نواة المعادلة التكاملية.

أما المعادلة التكاملية التي تأخذ الشكل التالي



$$g(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t).g(t).dt$$

علماً أن $g(x)$ هو التابع المجهول ، $f(x)$ و $k(x,t)$ تابعان مفروضان و a مقدار ثابت فتسمى معادلة فولترا التكاملية من النوع الثاني

وفي حالة $f(x) = 0$ نحصل على المعادلة التكاملية المتجانسة

$$g(x) = \int_a^x k(x,t).g(t).dt$$

- تعرف معادلة فريدهولم التكاملية من النوع الأول.

$$\int_a^b k(x,t).g(t).dt = f(x)$$

علماً أن : $g(x)$ هو التابع المجهول ، $f(x)$ ، $k(x,t)$ تابعان مفروضان ، a,b ثابتان .

- معادلة فولترا التكاملية من النوع الأول : $\int_a^b k(x,t).g(t)dt = f(x)$

علماً أن $g(x)$ هو التابع المجهول ، $f(x)$ ، $k(x,t)$ تابعان معلومان

a مقدار ثابت .

ملاحظة :

معادلة آبل التكاملية.

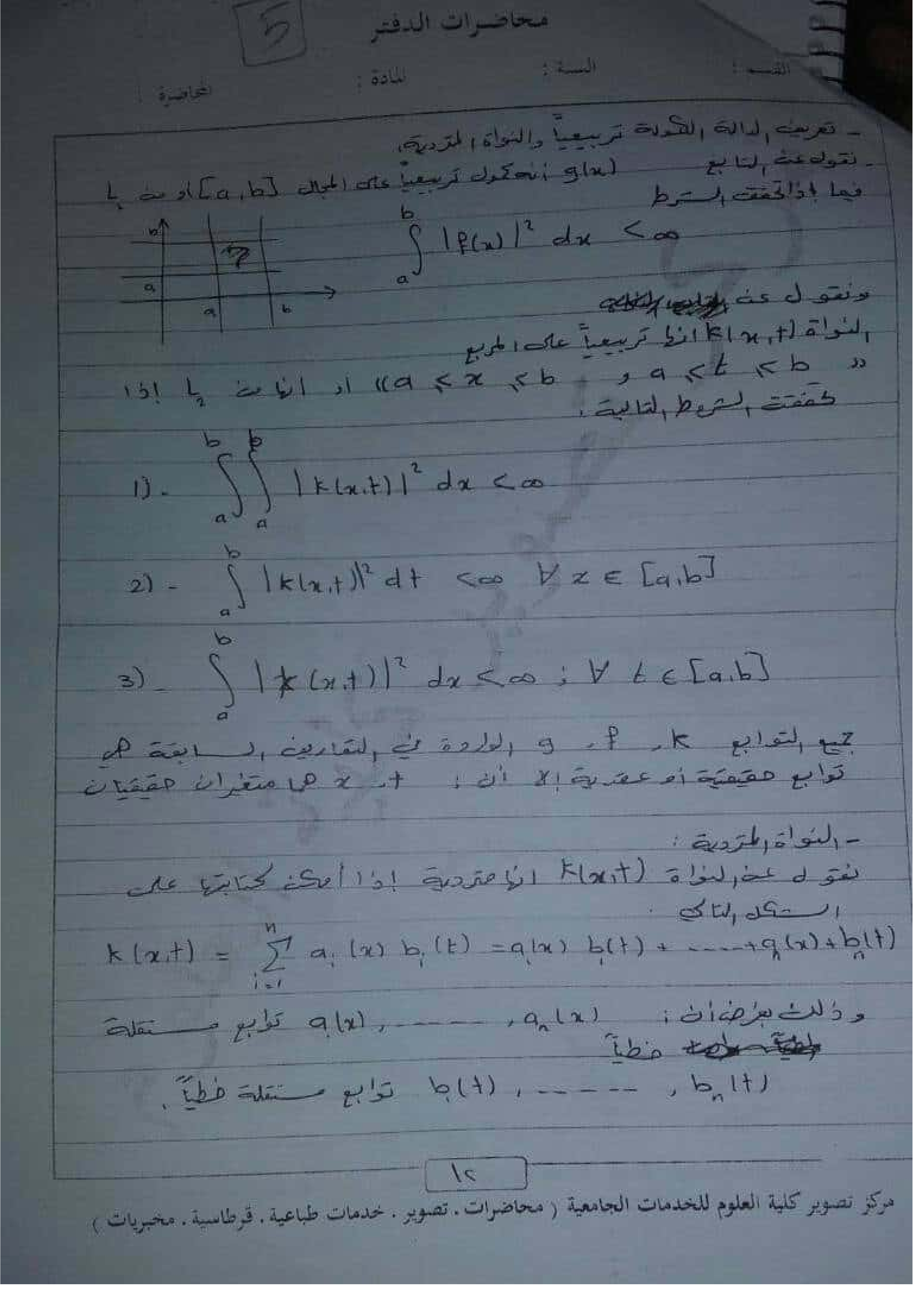
$$\int_0^x \frac{\varphi(y)\,dy}{(x-y)^{\alpha}} = f(x)$$

علماً أن $\varphi(x)$ هو التابع المجهول ، $f(x)$ تابع معلوم $0 < \alpha < 1$

ونلاحظ أن معادلة آبل التكاملية ما هي إلا حالة خاصة من معادلة فولترا التكاملية

ملاحظة :

سوف تقتصر في دراستنا فيما بعد على معادلات تكاملية من النوع الثاني وسوف يكون لمعادلة فريدهولم تكاملية من النوع الثاني القسم الأكبر من هذه الدراسة والسبب لذلك يعود إلى أن الطالب يفاد من هذا النوع من المعادلات التكاملية عند ايجاد مسائل الحلول في الفيزيائية الرياضية .



- تعريف الدالة الكمولة تربيعياً والنواة المتردية.

- نقول عن التابع $g(x)$ إنه كمول تربيعياً على المجال $[a,b]$ أو من L_2 فيما إذا تحقق الشرط

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx < \infty$$

ونقول عن النواة $k(x,t)$ إنها تربيعياً على المربع "$a < x < b$ و $a < t < b$" أو إنها من L_2 إذا تحققت الشروط التالية:

1) $$\int_a^b \int_a^b |k(x,t)|^2 \, dx < \infty$$

2) $$\int_a^b |k(x,t)|^2 \, dt < \infty \quad \forall x \in [a,b]$$

3) $$\int_a^b |k(x,t)|^2 \, dx < \infty \; ; \; \forall t \in [a,b]$$

جميع التوابع k ، f ، g الواردة في التعاريف السابقة هي توابع حقيقية أو عقدية إلا أن t ، x هي متغيرات حقيقية

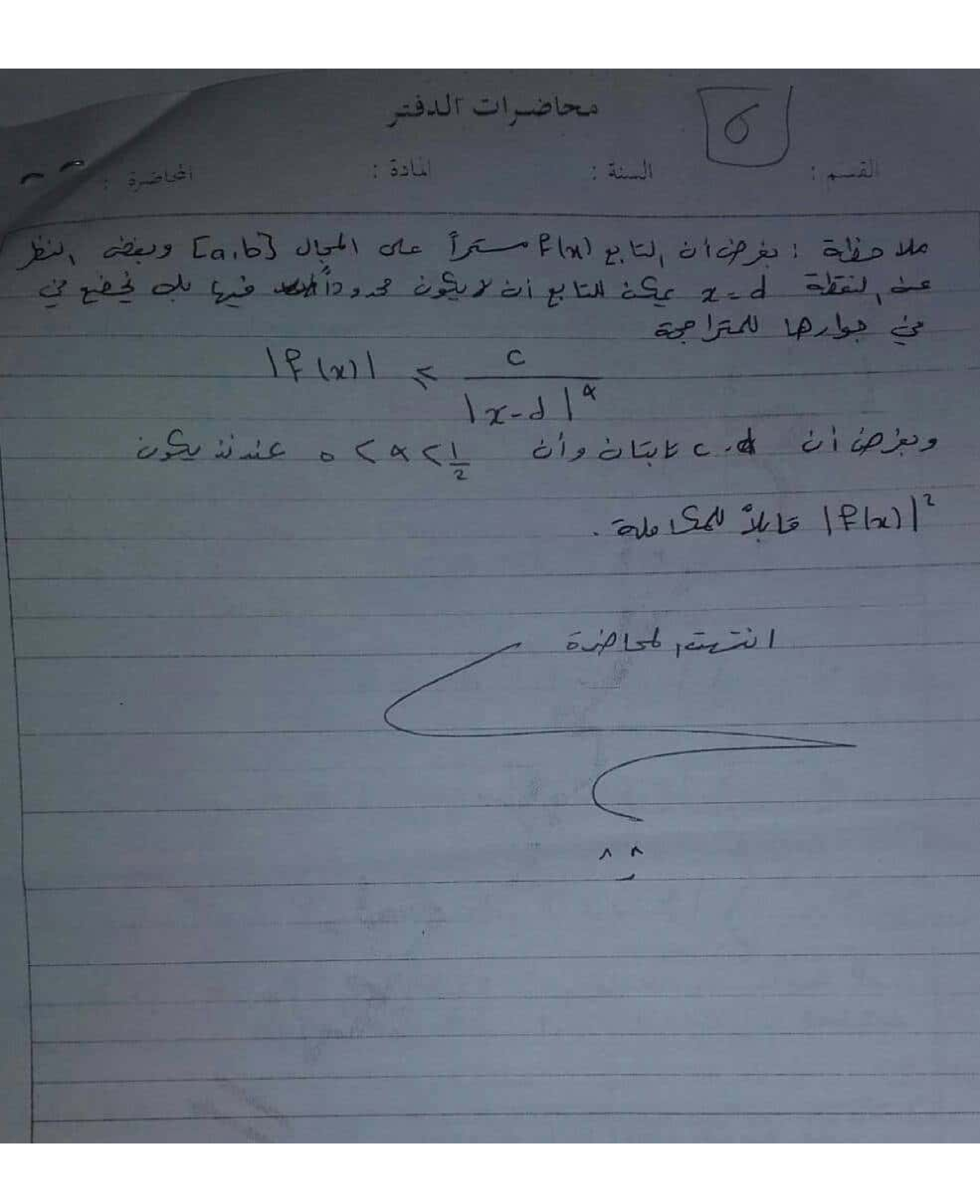
- النواة المتردية:

نقول عن النواة $k(x,t)$ إنها متردية إذا أمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$k(x,t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(t) = a_1(x)\, b_1(t) + \cdots + a_n(x) + b_n(t)$$

وذلك بفرض أن: $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ توابع مستقلة خطياً

$b_1(t), \ldots, b_n(t)$ توابع مستقلة خطياً.



محاضرات الدفتر

٥

القسم : السنة : المادة : المحاضرة :

ملاحظة : نفرض أن التابع $f(x)$ مستمراً على المجال $[a,b]$ وبغض النظر عن النقطة $x = d$ يمكن التابع أن لا يكون محدوداً فيها بل يخضع في في جوارها للمتراجحة

$$|f(x)| \leq \frac{c}{|x-d|^{\alpha}}$$

ونفرض أن c , d ثابتان وأن $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ عندئذ يكون

$|f(x)|^2$ قابلاً للمكاملة .

انتهت المحاضرة